Prof. Dr. Alfred Toth

Die triadische klassentheoretische Zeichenmenge mit und ohne Auswahlaxiom

1. Wie in Toth (2009) gezeigt, kann man die Peirceschen Fundamentalkategorien als Mengen und daher die Zeichenrelation als Menge über Mengen definieren. Da das Peircesche Zeichen relational als „Relation über Relationen" definiert ist, so zwar, dass die Erstheit in der Zweitheit und beide in der Drittheit inkludiert sind, ergibt sich an mengentheoretisches Äquivalent:

$ZK = \{\{M\}, \{\{O\}, \{I\}\}\}$.

Wenn x, y, z Mengen sind, hat ZK also die Struktur

$ZK = \{x, \{y, z\}\}$,

d.h. das Zeichen ist eine dyadische Menge aus einer einfachen und einer Paarmenge. Damit ist der dyadische Klassenkalkül auf sie anwendbar (vgl. Menne 1991, S. 101 ff.). Ferner kann man aus ZK mit Hilfe des Auswahlaxioms (vgl. z.B. Ebbinghaus 1994, S. 121 ff.) weitere Zeichenmengen bilden, denn ZK ist eine Partition, d.h. es gilt $x \cap \{y, z\} = \varnothing$ bzw. $\{M\} \cap \{\{O\}, \{I\}\} = \varnothing$. Wenn wir wie übliche numerische Schreibweise für M, O, I verwenden, erhalten wir damit genau folgende 3 Mengen:

$ZK1 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$
$ZK2 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$
$ZK3 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$,

nicht jedoch die übrigen zwei aus der Partition von $\{1, 2, 3\}$ entstehenden Mengen $\{\{1, 2, 3\}\}$ und $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, da sie nicht der Inklusionsordnung von $ZK = \{\{M\}, \{\{O\}, \{I\}\}\}$ entsprechen.

2. Nun hat Bense (1979, S. 53, 67) aber gezeigt, dass die Einführung des Zeichens als „Relation über Relationen" natürlich nicht nur die Fundamentalkategorien als „Objekte", sondern auch ihre semiotischen Funktionen als „Morphismen" einschliesst, d.h. wir haben

$ZR = (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I))$,

numerisch

$ZR = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3))$.

Wenn man den letzteren Ausdruck allerdings mengentheoretisch notiert, haben wir

$ZK^* = \{\{1\} \rightarrow \{\{\{1\} \rightarrow \{2\}\} \rightarrow \{\{1\} \rightarrow \{2\} \rightarrow \{3\}\}\}$,

aber in ZK* sind im Gegensatz zu

$ZK = \{\{1\}, \{\{2\}, \{3\}\}\}$.

die Bedingungen der Partition nicht mehr erfüllt, da jede Menge der Stufe (n+1) alle Mengen der Stufe (n) „mitführen", d.h. die Schnittmengen zwischen den Mengen der verschiedenen Stufen sind nicht mehr leer. Damit bleibt also ZK* die einzige mögliche mögliche Menge ohne Auswahlaxiom, während wir im ersten Teil mit Auswahlaxiom ZK1, ZK2 und ZK3 bekommen.

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979
Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Einfphrung in die Mengenlehre. 3. Aufl. Mannheim 1994
Menne, Albert, Einführung in die formale Logik. 3. Aufl. Darmstadt 1991
Toth, Alfred, Das Zeichen als triadische Klasse. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Zeichen%20als%20triad.%20Klasse.pdf (2009)

26.12.2009